Доказано [2] что, если система (1) есть слабо регулярной, то следующая система:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad \frac{dy}{dt} = x - P^T(\varphi)y \tag{2}$$

будет регулярной. Причем производная невырожденной квадратичной формы $V_p(\varphi, x, y) = p\langle x, y\rangle + \langle S(\varphi)y, y\rangle$ в силу системы (2) при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной.

Одно из направлений обобщения метода расширения (2) привело к следующим утверждениям:

**Теорема 1.** *Пусть существуют* $(n \times n)$*-мерные симметричные матрицы* $S_i(\varphi) \in C'(T_m; a)$, $i = \overline{1, k}$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\langle[\dot{S}_i(\varphi) + S_i(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S_i(\varphi)]M_i(\varphi)x, M_i(\varphi)x\rangle \geqslant \|(M_i(\varphi) - M_{i+1}(\varphi))x\|^2, \quad i = \overline{1, (k-1)},$$

$$\langle[\dot{S}_k(\varphi) + S_k(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S_k(\varphi)]M_k(\varphi)y, M_k(\varphi)y\rangle \geqslant \|M_k(\varphi)x\|^2$$

*с некоторыми матрицами* $M_i(\varphi) \in C^0(T_m)$, $i = \overline{1, k}$ *и пусть матрицы* $S_1(\varphi) \in C'(T_m; a)$, $M_1(\varphi) \in C^0(T_m)$ *— невырожденные. Тогда система* (1) *будет регулярной. Причем производная пучка квадратичных форм* $V_p = \lambda_1\langle S_1(\varphi)x, x\rangle + \ldots + \lambda_{k-1}\langle S_{k-1}(\varphi)x, x\rangle + \langle S_k(\varphi)x, x\rangle$ *вдоль решений системы* (1) *будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметров* $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, (k-1)}$.

**Теорема 2.** *Пусть две системы уравнений* $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $dx/dt = P_i(\varphi)x$, $i = 1, 2$, *являются слабо регулярными, тогда следующая система уравнений:*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy_1}{dt} = \left[P_2(\varphi) + \frac{1}{2}(P_1(\varphi) + P_1^T(\varphi)) - I_n\right]y_1 + [P_2^T(\varphi) + P_1(\varphi)]y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \left[-P_2(\varphi) + \frac{1}{2}(P_1(\varphi) - P_1^T(\varphi)) + I_n\right]y_1 - P_2^T(\varphi)y_2,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = \left[P_2(\varphi) + \frac{1}{2}(P_1(\varphi) - P_1^T(\varphi)) + I_n\right]y_1 - [P_2^T(\varphi) + P_1(\varphi)]y_2 - P_1^T(\varphi)y_3, \tag{3}$$

*где* $y_i \in \mathbb{R}^n$, *будет регулярной. Причем производная невырожденной квадратичной формы* $V_p = p^2(\langle y_1, y_2\rangle + \langle y_1, y_3\rangle + \langle y_2, y_3\rangle) + p\langle S_2(\varphi)y_2, y_2\rangle + \langle S_1(\varphi)y_3, y_3\rangle$ *в силу системы* (3) *при достаточно больших значениях параметра* $p > 0$ *будет положительно определенной.*

**Литература**


1. Самойленко А. М. *Элементы математической теории многочастотных колебаний.* М.: Наука, 1987. 302 с.

2. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.* Киев: Наук. думка, 1990. 270 с.

3. Кулик В. Л., Кулик А. Н., Степаненко Н. В. *Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных* // Математический журнал. Алматы. 2011. Т. 11, № 1. С. 74–86.


## УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ


**А.А. Кушнер**

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
vesna85@tut.by


Рассмотрим систему типа систем Льенара

$$yP_0(x)y' = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3, \tag{1}$$

где $P_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{6} c_k x^k, P_2(x) = \sum_{j=0}^{5} a_j x^j, P_3(x) = \sum_{i=0}^{7} b_i x^i$.

Фокусные величины $f_i, i = 1, 2, \ldots$ являются полиномами из кольца $\mathbb{C}[t]$, где

$$t = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6).$$

Образуем идеал $E = \langle f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots \rangle \subset \mathbb{C}[t]$. Тогда $\mathbb{V}(E) = \{t \in \mathbb{C}^{20} : \forall f \in E, f(t) = 0\}$ является многообразием центра системы (1) [1]. Очевидно, что $O(0,0)$ системы (1) — центр тогда и только тогда, когда $t \in \mathbb{V}(E)$.

Если первая фокусная величина равна нулю, то $P_3(x) = xQ(x)$, $Q(x) = \sum_{i=1}^{7} b_i x^{i-1}$. Обозначим $xR(x) = Q'(x)P_0(x)+3Q(x)P_2(x)$. $O(0,0)$ является центром, если $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \equiv \mathrm{const}$.

Представим полином $Q(x)$ в виде $Q(x)=b_1Q_0^3(x)$, где $Q_0(x)=1-a_0x+(b_3-3a_0^2b_1)x^2/(3b_1)$. Тогда имеет место следующая

**Теорема 1**. *Если* $t \in \bigcup_{k=1}^{3} \mathbb{V}(I_k)$, *то* $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \mathrm{const}$, *и в этом случае начало координат является центром системы* (1), *где*

$I_1 = \langle b_0, b_2+3a_0b_1, b_3-3a_0^2b_1, b_4+a_0^3b_1, b_5, b_6, b_7, a_2-3a_0^2(a_0+c_1)-a_0(c_2-2a_1), a_3-a_0^2(a_1+c_2)- -a_0c_3, a_4-a_0^4(a_0+c_1)-a_0^2(a_0c_2+c_3)-a_0c4, a_5-a_0^5(a_0+c_1-a_0^3(a_0c_2+c_3)-a_0(a_0c_4+c5)), c_6+a_5\rangle$,

$I_2 = \langle b_0, b_2 + 3a_0b_1, 4b_3 - 15a_0^2b_1, 2b_4 + 5a_0^3b_1, 16b_5 + 15a_0^4b_1, 16b_6 + 3a_0^5b_1, 64b_7 - a_0^6b1, 4a_2 - -5a_0^2(a_0+2c_1)-4a_0(2a_1-c_2), 8(a_3-a_0c_3)+5a_0^3(a_0+2c_1)-4a_0^2(3a_1+c_2), 16(a_4-a_0c_4)-5a_0^4(a_0+ +2c_1) - 4a_0^2(2a_0a_1 - a_0c_2 - 2c_3), 16(a_5 - a_0c_5) - 2a_0^2(a_0^2c_2 + 2a_0c_3 + 4c_4) - a_0^4a_1, 32(2c_6 + a_0c_5) + + 8a_0^2(a_0c_3 + 2c_4) + a_0^4(a_0^2 + 2a_0c_1 + 4c_2)\rangle$,

$I_3 = \langle b_0, b_2+3a_0b_1, b_4-a_0(5a_0^2b_1-2b_3), 3b_1b_5-b_3(b_3-3a_0^2b_1), 3b_1b_6+a_0(b_3-3a_0^2b_1)^2, 27b_1^2b_7+ +(3a_0^2b_1-b_3)^3, 5a_0^2(2a_0+c_1)-\frac{2b_3c_1}{3b_1}+a_0(c_2-2a_1-7b_3/(3b_1))-a_2, 15a_0^3b_1^2(2a_0+c_1)+2b_3(a_1b_1+b_3- -b_1c_2)+a_0^2b_1(-3a_1b_1-16b_3+9b_1c_2)+a_0b_1(3b_1c_3-5b_3c_1)-3b_1^2a_3, 45a_0^4b_1^2(a_0+c_1)+3a_0^3b_1(6b_1(a_1+ +2c_2)-5b_3)+2b_3(b_3c_1-3b_1c_3)+9a_0^2b_1(3b_1c_3-2b_3c_1)+a_0(b_3^2-6a_0b_1b_3-9b_1b_3c_2+9b_1^2c_4)- -9b_1^2a_4, (3a_0^2b_1-b_3)(3a_0^3b_1(7a_0+5c_1)-b_3(a_1+2c_2)+a_0^2(3b_1-5b_3)(a_1+4c_2))+3a_0(b_1c_3-b_3c_1)+ +6b_1c_4-9b_1^2a_5, 27b_1^3c_6+(3a_0^2b_1-b_3)(9a_0^3b_1^2(5a_0+3c_1)-3b_1b_3c_2+3a_0^2b_1(6b_1c_2-5b_3)+3a_0b_1(3b_1c_3- -2b_3c_1)+9b_1^2c_4), 9b_1^2c_5-(3a_0^3b_1(10b_3-9b_1c_2)-9a_0^4b_1^2(8a_0+5c_1)+b_3(3b_1c_3-b_3c_1)-3a_0^2b_1(6b_1c_3- -b_3c_1)-3a_0(b_3^2-2b_1b_3c_2+3b_1^2c_4))\rangle$.

Далее рассмотрим систему, которую можно привести к системе

$$x' = y(1 + Dx + Px^2 + Fx^3),$$

$$y' = -x+Ax^2+3Bxy+Cy^2+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2+Ny^3+Rx^4+3Sx^3y+Wx^2y^2+Vxy^3, \quad (2)$$

где $A, B, C, D, F, K, L, M, N, P, R, S, W, V \in \mathbb{C}$.

Фокусные величины $g_j$, $j = 1, 2, \ldots$ являются полиномами из кольца $\mathbb{C}[p]$, где $p = = (A, B, C, D, F, K, L, M, N, P, R, S, W, V)$.

Образуем идеал $T = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots\rangle \subset \mathbb{C}[p]$. Множество $V = \mathbb{V}(\langle g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots\rangle)$ называется многообразием центра системы (2) [2, 3]. Точка $O(0,0)$ системы (2) является центром тогда и только тогда, когда $p \in \mathbb{V}(T)$.

Образуем идеалы:

$J_1 = \langle B(A+C)+L+N, -6BN(AC+C^2-K)-2D(AC+C^2-K)^2+W(AC+C^2-K)+ +2C(AC+C^2-K)^2-N^2(A+3C), S-N(A+C), -3BN^2(AC+C^2-K)-DN(AC+C^2- -K)^2+CN(AC+C^2-K)^2+V(AC+C^2-K)^2-CN^3, -3BCN(AC+C^2-K)-CD(AC+ +C^2-K)^2+M(AC+C^2-K)^2-(2AC+C^2-2K)(AC+C^2-K)^2+N^2(AC-K), R-(A+ +C)(AC+C^2-K), -3BN(A+2C)(AC+C^2-K)-CD(AC+C^2-K)^2+N^2(-2AC-3C^2+ +K)+P(AC+C^2-K)^2-(AC-K)(AC+C^2-K)^2, -3BN(AC+C^2-K)-D(AC+C^2- -K)^2+F(AC+C^2-K)+C(AC+C^2-K)^2+AN^2\rangle$,

$J_2 = \langle B(A+C)+L, W-2F, S, V, -2(AC+C^2-K)(2A^2C+2AC^2-2AK-CK)-2D(3AC+ +3C^2-2K)(AC+C^2-K)+F(4AC+3C^2-4K)+M(2A+3C)(AC+C^2-K), R-(A+ +C)(AC+C^2-K), -(AC+C^2-K)(2A^2C+2AC^2-2AK-CK)-D(3AC+3C^2-2K)(AC+ +C^2-K)+P(2A+3C)(AC+C^2-K)+F(AC-2K), N\rangle$,

$J_3 = \langle B(A+C)+L+N, 6BN(A+C)(A+2C)+N^2(2A+3C)+2P(A+C)(A+2C)^2+CW(A+2C)+2(A+C)^2(A+2C)^3, N(-A-C)+S, -3BN^2(A+2C)-NP(A+2C)^2+N(-(A+C))(A+2C)^3+CV(A+2C)^2-N^3, -3BN(A+C)(A+2C)+M(A+C)(A+2C)^2+N^2(-2A-3C)-P(A+C)(A+2C)^2+(A+C)^2(A+2C)^3, 3BN(A+C)(A+2C)+CF(A+2C)+P(A+C)(A+2C)^2+(A+C)^2(A+2C)^3+AN^2, (A+2C)(A+C)^2+R, K-(A+C)(A+3C), -(A+2C)(A^2+3AC+3C^2)(A+C)^2-3BN(A+2C)(A+C)+CD(A+2C)(A+C)^2-P(A+2C)(A+C)^2-AN^2\rangle$,

$J_4 = \langle B(A+C)+L+N, 24BN(A+C)(A+3C)+16N^2(3A+7C)+4W(A+3C)^2-C(A+C)^2(A+3C)^2, -B(A+C)^2-2N(A+C)+4S, -48BN^2(A+C)(A+3C)-16N^3(5A+11C)+4NP(A+C)(A+3C)^2-N(A-3C)(A+C)^2(A+3C)^2+4V(A+C)(A+3C)^3, -12BN(A+C)(A+3C)+M(A+C)(A+3C)^2-4N^2(3A+5C)+C(A+C)^2(A+3C)^2, C(A+C)^2+4R, (A-3C)(A+C)+4K, 16F(A+3C)+4P(A+3C)(A+C)-(A+3C)(A+C)^3+16N^2, 4D(A+3C)(A+C)^2+4P(A+3C)(A+C)+3(A+3C)(A+C)^3-16N^2\rangle$.

**Теорема 2**. *Пусть $V$ — многообразие центра системы* (2). *Тогда* $\bigcup_{k=1}^4 \mathbb{V}(J_k) \subset \mathbb{V}(T)$.

Доказательство теоремы 2 следует из того, что при $p \in \bigcup_{k=1}^4 \mathbb{V}(J_k)$ особая точка $O(0,0)$ — центр системы (2), ибо $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \mathrm{const}$.

### Литература


1. Кокс Д., Литл Дж., О'Ши Д. *Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры.* М.: Мир, 2000.
2. Садовский А. П. *Полиномиальные идеалы и многообразия.* Мн.: Изд-во БГУ, 2008.
3. Садовский А.П. *К условиям центра и фокуса для уравнений нелинейных колебаний* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 9. С. 1716–1719.


## О СТРУКТУРЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ


**В.Н. Лаптинский**[1], **В.А. Ливинская**[2]

[1] Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь
lavani@tut.by
[2] Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь


Исследуется задача о периодических решениях с периодом $\omega$ уравнения типа [1–4]

$$\ddot{X} = \lambda A(t)X + \lambda^2(P(t)X + XB(t)) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $F(t)$ — непрерывные $\omega$-периодические матрицы соответствующих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$.

На основе применения метода [5, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости этой задачи, а также алгоритм построения решения.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|P(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|, \quad q_1 = \frac{1}{4}\gamma\alpha^2\omega^3 + \gamma(\beta+\mu)\omega, \quad q_2 = \frac{1}{4}\gamma\alpha(\beta+\mu)\omega^3,$$

$$q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2, \quad K = \frac{1}{2}\varepsilon\omega[\alpha + \varepsilon(\beta+\mu)], \quad H = \frac{1}{4}\gamma\alpha\omega^3 h + \frac{1}{\varepsilon}\gamma\omega h,$$

где $t \in [0, \omega]$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.